



TITLE:

区分線形写像によって生成される  
カオスの高次相関関数(低次元カオ  
スⅢ,カオスとその周辺,研究会報告)

AUTHOR(S):

永井, 喜則; 市村, 純; 土屋, 尚

---

CITATION:

永井, 喜則 ...[et al]. 区分線形写像によって生成されるカオスの高次相関関数(低次元カオスⅢ,カオスとその周辺,研究会報告). 物性研究 1986, 46(2): 221-225

ISSUE DATE:

1986-05-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/92006>

RIGHT:

に示されたように、「I.」で得られた結果、 $\sigma/\tau \propto \varepsilon^{-1/4}$ と一致している。

一方、パワースペクトルを調べてみると、図3に示したようになる。現象論的解析の結果では、 $\xi_n \equiv 0$ のとき、 $S(\omega) \propto \omega^{-1/2}$ 、 $\xi_n \equiv \pi$ のとき、 $S(\omega) \propto \omega^{-3/2}$ となっており、一致は見られない。今後の課題である。

## References

「逆周期倍化分岐による間欠性カオスのスペクトル構造.I. 現象論的アプローチ」と同じ。

## 区分線形写像によって生成されるカオスの高次相関関数<sup>(1)</sup>

麻布大・獣医 永 井 喜 則  
早大・理工 市 村 純  
CSK 総研・生物情報 土 屋 尚

われわれは決定論的方程式によって生成されるカオス状態の時系列を相関関数という量で特徴付けることを試みる。最も発達したカオスを与える区分線形写像は厳密に取り扱えるので、これらに対する高次相関関数は具体的に計算可能である。

ここでは図1に示すような4つの一次元パイこね変換を扱う。これら4つのパイこね変換で産み出されるカオス時系列の普遍測度は平坦なもので、その大きさはすべての場合1である。そしてそれらの平均値はどの場合も $\frac{1}{2}$ となる。

4つのパイこね変換のうちの1つSBマップの $n$ 次相関関数は、

$$\begin{aligned} & {}^{(n)}C_{SB}(\tau_1, \tau_1 + \tau_2, \dots, \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_{n-1}) \\ &= \int_0^1 (x - \langle x \rangle_{SB}) \prod_{l=1}^{n-1} (f_{SB}^{\tau_1 + \dots + \tau_l} - \langle x \rangle_{SB}) \rho_{SB}(x) dx \\ &= 2^{\sum_{i=1}^{n-1} (n-i) \tau_i} \sum_{k_1=1}^{2^{\tau_1-1}} \sum_{k_2=k_1 2^{\tau_2}}^{(k_1+1) 2^{\tau_2-1}} \dots \sum_{k_{n-1}=k_{n-1} 2^{\tau_{n-1}}}^{(k_{n-2}+1) 2^{\tau_{n-1}-1}} \\ &\quad \times \int_{\frac{k_{n-1}}{2^{\tau_1 + \dots + \tau_{n-1}}}}^{\frac{k_{n-1}+1}{2^{\tau_1 + \dots + \tau_{n-1}}}} (x - \frac{1}{2}) \prod_{l=1}^{n-1} (x - \frac{2k_l + 1}{2^{\tau_1 + \dots + \tau_l + 1}}) dx \end{aligned} \quad (1)$$

で与えられる。この相関関数の計算の方法を簡単にわかり易くのべると次のようになる。

区分線形写像によって生成される、もっとも発達したカオス時系列の厳密解は幾何学的に表現でき、図2のようになる。カオス時系列の相関関数は普遍測度を用いて計算できるので、

$n$  次相関関数は図 2 に示されている厳密解のフレームを，時間間隔に応じて， $n$  枚とって重ね，それに重みとして普遍測度  $\rho$  をかけて積分すれば得られる。

TB マップの場合の  $n$  次相関関数は次のようになる。

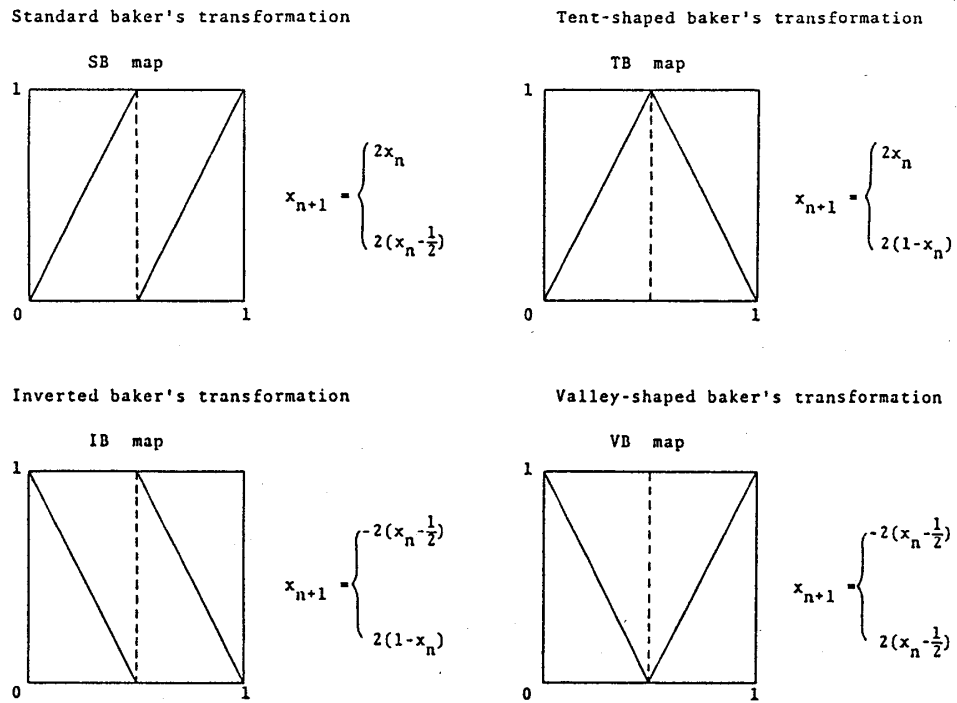


図 1

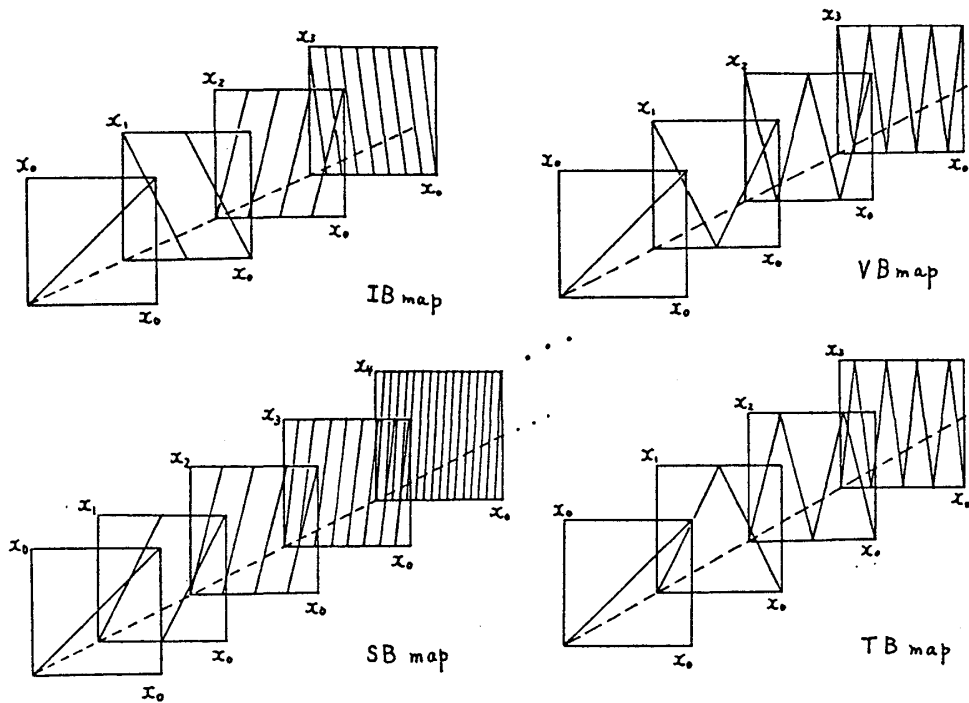


図 2

$$\begin{aligned}
& {}^{(n)}C_{TB}(\tau_1, \tau_1 + \tau_2, \dots, \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_{n-1}) \\
&= 2^{\sum_{i=1}^{n-1} (n-i)\tau_i} \sum_{k_1=0}^{2^{\tau_1-1}} \sum_{k_2=k_1}^{(k_1+1)2^{\tau_2-1}} \dots \sum_{k_{n-1}=k_{n-1}}^{(k_{n-2}+1)2^{\tau_{n-1}-1}} \\
&\quad \times \int_{\frac{k_{n-1}}{2^{\tau_1+\dots+\tau_{n-1}}}}^{\frac{k_{n-1}+1}{2^{\tau_1+\dots+\tau_{n-1}}}} (-1)^{k_1+k_2+\dots+k_{n-1}} \left(x - \frac{1}{2}\right) \prod_{l=1}^{n-1} \left(x - \frac{2k_l+1}{2^{\tau_1+\dots+\tau_l+1}}\right) dx \quad (II)
\end{aligned}$$

SB と IB および TB と VB の間には (III) 式に示される関係があるので、それらの関係から相関関数の関係が求められる。

$$\begin{aligned}
f_{SB}^{(2\tau)}(x) &= f_{IB}^{(2\tau)}(x), \quad f_{SB}^{(2\tau+1)}(x) + f_{IB}^{(2\tau+1)}(x) = 1, \quad (\tau \geq 0) \\
f_{TB}^{(\tau)}(x) + f_{VB}^{(\tau)}(x) &= 1, \quad (\tau \geq 1), \quad f_{TB}^{(0)}(x) = f_{VB}^{(0)}(x) \quad (III)
\end{aligned}$$

このようにして得られる 4 つの写像の産み出すカオス時系列の高次相関関数を 5 次まで計算してまとめたものが表 1 である。

SB, IB と TB, VB とはそれぞれ対をなしているので、SB と TB に注目してこれからは議論をする。SB によって生成されるカオス時系列の奇数次相関関数は表からわかるようにすべて零になる。また 4 次相関関数は 2 次の相関関数だけを用いて表わすことができる。すなわち、

$$\begin{aligned}
{}^{(4)}C_{SB}(t, t', t'') &= {}^{(2)}C_{SB}(t''-t) {}^{(2)}C_{SB}(t') + {}^{(2)}C_{SB}(t'') {}^{(2)}C_{SB}(t'-t) \\
&\quad + {}^{(2)}C_{SB}(t''-t) {}^{(2)}C_{SB}(t) - \frac{72}{5} {}^{(2)}C_{SB}(t'') {}^{(2)}C_{SB}(t''-t') {}^{(2)}C_{SB}(t''-t) \\
t &= \tau_1, \quad t' = \tau_1 + \tau_2, \quad t'' = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 \quad (IV)
\end{aligned}$$

である。しかし TB によるカオス時系列では、これらのことは言えない。TB による時系列は 2 次相関が  $\delta$  型であるが、すべての次数の高次相関関数に有限の値をもつものが現われている。

これらの結果は SB によって生成される時系列と TB のそれとは、普遍測度やリヤプノフ数といった量では区別され得ないが、高次相関関数をとればもとのマップの違いを反映して区別され得ることを示している。

次にこれらの写像を何回か iterate した高次の区分線形写像によって生成されるカオス時系列の相関関数の性質について述べる。

無限回 iterate した区分線形写像によって生成されるカオス時系列はマップによらず全部同

表 1

	SB map	IB map	TB map	VB map
$(2)C(\tau_1)$	$\frac{1}{12} \frac{1}{2^{\tau_1}}$	$(-1)^{\tau_1} \frac{1}{12} \frac{1}{2^{\tau_1}}$	$\frac{1}{12} \delta_{\tau_1,0}$	$\frac{1}{12} \delta_{\tau_1,0}$
$(3)C(\tau_1, \tau_1 + \tau_2)$	0	0	$-\frac{1}{12} \delta_{\tau_1,0} \frac{1}{2^{2\tau_2}} (1 - \delta_{\tau_2,0})$	$-\frac{1}{12} \delta_{\tau_1,0} \frac{1}{2^{2\tau_2}} (1 - \delta_{\tau_2,0})$
$(4)C(\tau_1, \tau_1 + \tau_2, \tau_1 + \tau_2 + \tau_3)$	$-\frac{1}{15} \frac{1}{2^{\tau_1+2\tau_2+3\tau_3+3}} + \frac{1}{9} \frac{1}{2^{\tau_1+2\tau_2+\tau_3+3}} + \frac{1}{9} \frac{1}{2^{\tau_1+\tau_3+4}}$	$(-1)^{\tau_1+\tau_2+\tau_3+1} \times \left( \frac{1}{15} \frac{1}{2^{\tau_1+2\tau_2+3\tau_3+3}} - \frac{1}{9} \frac{1}{2^{\tau_1+2\tau_2+\tau_3+3}} - \frac{1}{9} \frac{1}{2^{\tau_1+\tau_3+4}} \right)$	$\left( \left( \frac{1}{12} \right)^2 + \frac{1}{180} \frac{1}{2^{2\tau_2}} \right) \delta_{\tau_1,0} \delta_{\tau_3,0} + \frac{1}{12} \delta_{\tau_1,0} \frac{1}{2^{2\tau_2+2\tau_3}} (1 - \delta_{\tau_2,0}) (1 - \delta_{\tau_3,0})$	$(-1)^{1-\delta_{\tau_2,0}} \times \left( \left( \frac{1}{12} \right)^2 + \frac{1}{180} \frac{1}{2^{2\tau_2}} \right) \delta_{\tau_1,0} \delta_{\tau_3,0} - \frac{1}{12} \delta_{\tau_1,0} \frac{1}{2^{2\tau_2+2\tau_3}} (1 - \delta_{\tau_2,0}) (1 - \delta_{\tau_3,0})$
$(5)C(\tau_1, \tau_1 + \tau_2, \tau_1 + \tau_2 + \tau_3, \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \tau_4)$	0	0	$-\frac{1}{2^{2\tau_2}} \left( \frac{1}{16} + \frac{1}{180} \frac{1}{2^{2\tau_3}} \right) \times \delta_{\tau_1,0} (1 - \delta_{\tau_2,0}) (1 - \delta_{\tau_3,0}) \delta_{\tau_4,0} - \frac{1}{2^{2\tau_4}} \left( \frac{1}{144} (1 + 5 \frac{1}{2^{2\tau_2}}) - \frac{1}{10} \frac{1}{2^{2\tau_2+2\tau_4}} \right) \times \delta_{\tau_1,0} (1 - \delta_{\tau_2,0}) \delta_{\tau_3,0} (1 - \delta_{\tau_4,0}) - \frac{1}{12} \frac{1}{2^{2\tau_2+2\tau_3+2\tau_4}} \times \delta_{\tau_1,0} (1 - \delta_{\tau_2,0}) (1 - \delta_{\tau_3,0}) (1 - \delta_{\tau_4,0})$	$-\frac{1}{2^{2\tau_2}} \left( \frac{1}{16} + \frac{1}{180} \frac{1}{2^{2\tau_3}} \right) \times \delta_{\tau_1,0} (1 - \delta_{\tau_2,0}) (1 - \delta_{\tau_3,0}) \delta_{\tau_4,0} - \frac{1}{2^{2\tau_4}} \left( \frac{1}{144} (1 + 5 \frac{1}{2^{2\tau_2}}) - \frac{1}{10} \frac{1}{2^{2\tau_2+2\tau_4}} \right) \times \delta_{\tau_1,0} (1 - \delta_{\tau_2,0}) \delta_{\tau_3,0} (1 - \delta_{\tau_4,0}) - \frac{1}{12} \frac{1}{2^{2\tau_2+2\tau_3+2\tau_4}} \times \delta_{\tau_1,0} (1 - \delta_{\tau_2,0}) (1 - \delta_{\tau_3,0}) (1 - \delta_{\tau_4,0})$

一の性質をもつようになる。計算できる5次までの高次相関関数について述べると、奇数次はすべて零、2次は $\delta$ 型、4次は $^{(4)}C(0, \tau, \tau)$ 以外すべて零となる。しかも4次は2次の対の積で表わされる。これはガウス過程の示す相関関数の性質ではあるが、<sup>(2)</sup>これらの写像によって生成される時系列の普遍測度は依然として一様分布になっている。このことはチェビシェフマップについても言えることである。チェビシェフマップによるカオス時系列の高次相関関数は文献(3)を参照。また4つの一次元パイコネ変換の高次相関関数及び詳しい議論は文献(1)参照。

### 参考文献

- 1) Y. Nagai, A. Ichimura, T. Tsuchiya, Phys. Lett. **112A** (1985) 259.
- 2) M. Nelkin, A. M. S. Tremblay, J. Stat. Phys. **25** (1981) 253.
- 3) T. Geisel, V. Fahren, Phys. Lett. **105A** (1984) 263.

### 記号力学系の高次相関関数

CSK総研 土 屋 尚  
早大・理工 市 村 純  
麻布大 永 井 喜 則

別の講演でも示したように、我々は最も発達した一次元カオス (fully developed chaos) に対する高次相関関数を厳密に求めた。<sup>1)</sup>我々の立場は相関関数の組で系の性質を規定しようとする確率過程論的なものである。ここでは fully developed chaos より得られる記号力学系の高次相関関数も同様に厳密に計算できることを示す。記号力学系を調べるモチベーションにはまず元の系の性質をより単純に把握できる可能性があることがある。又より実際的には、カオスを観測する際、機器の分解能等のため必然的に記号化したのと同じ効果が現われてしまうことがある。

単位区間上のリターンマップ  $f(x)$  に対して不変測度が

$$\rho(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N \delta[x - f^i(x_0)] \quad (1)$$

で与えられているとする。ここに  $f^i(x_0)$  は初期値  $x_0$  より出発して  $i$  回マッピングを繰り返した結果を表わす。 $f^i(x_0) \equiv x_i$  を記号化して  $\sigma_i$  という記号を与える操作を  $S$  とかく。つま